

13. а) Решите уравнение: $0,5 \sin^2 6x - \sin^2 \left(\frac{3\pi}{2} - 3x \right) = 0$.

б) Найдите корни, принадлежащие промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$.

14. Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина, BD — диагональ основания) образует с основанием угол 45° , сторона основания равна 4.

Через среднюю линию треугольника ABD , не пересекающую BD и середину высоты пирамиды, проведена плоскость α .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью α и докажите, что плоскость α перпендикулярна ребру SC .

б) Найдите объём пирамиды $SKLM$, где K , L и M точки пересечения α соответственно с рёбрами SB , SD и SC .

15. Решите неравенство $\frac{1}{2} \log_{x-2}(x^2 - 10x + 25) + \log_{5-x}(-x^2 + 7x - 10) > 3$.

16. В заданный угол, величиной α , не превосходящей π , вписаны две произвольные, касающиеся друг друга окружности.

а) Докажите, что отношение модуля разности радиусов к сумме радиусов этих окружностей является постоянной величиной.

б) Найдите радиус меньшей из указанных окружностей, если радиус большей окружности равен 10, а угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

17. Два индивидуальных предпринимателя занимались изготовлением зеркал.

В течение ряда лет первый предприниматель изготавливал одно и то же (но не более 210) количество зеркал за каждый год.

Второй предприниматель в этот период изготавливал за каждый год 90 % от того количества зеркал, которое изготавливал первый предприниматель.

После обновления оборудования второй предприниматель стал изготавливать за каждый год на 80 % больше, чем он изготавливал до этого обновления, и более, чем 244 зеркала.

Найдите, какое количество зеркал за каждый год после обновления оборудования стал выпускать второй предприниматель?

Каждый предприниматель за год изготавливает целое число зеркал.

18. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} (x - (3a^2 + 1))^2 + y^2 = a^2(9a^2 + 1), \\ y = ax^3; \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Вариант №1

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) точки M и N — середины боковых сторон. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MBN , если периметр треугольника ABC равен 32, а длина отрезка MN равна 6.
2. Две стороны треугольника равны 1 см и $\sqrt{15}$ см, а медиана к третьей стороне равна 2 см. Найдите $(5 - \sqrt{15})p$, где p — периметр треугольника.
3. В описанной около круга равнобокой трапеции расстояние от центра круга до дальней вершины трапеции втрое больше, чем до ближней вершины. Найдите тангенс острого угла трапеции.
4. В параллелограмме $ABCD$ длина отрезка AB равна 4. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K , а продолжение стороны CD в точке E . Найдите длину отрезка KC , если $EC = 1$.
5. Один из углов ромба равен 60° . В треугольник, образованный сторонами ромба и меньшей диагональю, вписана окружность, радиус которой равен $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Найдите периметр ромба.
6. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 и 17. Найдите диаметр этой окружности, если расстояние между серединами хорд равно 5.
7. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ из вершины C на диагональ AD опущен перпендикуляр, длина которого равна $2\sqrt{3}$. Найдите периметр шестиугольника.
8. Длина одного из катетов прямоугольного треугольника равна 12. Расстояние от центра описанной около треугольника окружности до этого катета равно 2,5. Найдите периметр треугольника.

Вариант №2

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) длина средней линии MN равна 6 ($M \in AB$, $N \in BC$), а $\sin \angle BAC = \frac{4}{5}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MBN .
2. В треугольнике ABC проведена медиана AD . Найдите BL , если AL — высота треугольника и $AB=1$ см, $AC=\sqrt{15}$ см, $AD=2$ см.

3. Диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 13, а расстояние от центра окружности до одного из катетов равно 2,5. Найдите площадь треугольника.
4. В равнобокой трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 4 см. Найдите высоту трапеции.
5. Сторона ромба равна 5 см, а длины диагоналей относятся как 4 : 3. Найдите сумму длин диагоналей ромба.
6. Центры двух окружностей находятся на расстоянии $\sqrt{80}$. Радиусы окружностей равны 4 и 8. Найдите длину общей касательной.
7. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной, равной 4. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ACE .
8. Высота трапеции равна 6 см, а ее площадь равна 24 см^2 . Найдите $S\sqrt{3}$, где S — площадь равностороннего треугольника со стороной, равной длине средней линии заданной трапеции.

Вариант №3

1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведена медиана CD , длина которой 2,5 см. Найдите периметр треугольника, если один из катетов на 1 см меньше гипотенузы.
2. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника равен $3\sqrt{2}$ см. Найдите длину биссектрисы прямого угла треугольника.
3. Длина одного из катетов прямоугольного треугольника равна 12. Расстояние от центра описанной около этого треугольника окружности до этого катета равно 2,5. Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности.
4. В параллелограмме сторона и большая диагональ равны соответственно 3 и $\sqrt{37}$. Найдите периметр параллелограмма, если его острый угол равен 60° .
5. В описанном около окружности четырехугольнике сумма двух противоположных сторон равна 45 см. Остальные две стороны относятся как 2 : 3. Найдите длину большей из этих сторон.
6. К окружности проведена касательная AB (B — точка касания). Прямая AC пересекает окружность в точках C и D . Найдите AD , если $AC = 1$, $AB = \sqrt{3}$.
7. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ радиус окружности, вписанной в треугольник ACE , равен 2. Найдите сторону шестиугольника.

8. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC длина средней линии MN равна 8. Площади четырёхугольников $MBCN$ и $AMND$ относятся как $2 : 3$ соответственно. На сколько длина AD больше длины BC ?

Вариант №4

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) точки M и N — середины сторон AB и BC , $\sin \angle BAC = \frac{4}{5}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MBN , если $AB = 10$.

2. В треугольнике MNP проведена медиана MD . Найдите её длину, если $MN = 1$, $MP = \sqrt{15}$ и $\cos \angle MNP = \frac{1}{4}$.

3. Тангенс острого угла BAC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) равен $\frac{5}{12}$, а расстояние от центра описанной около этого треугольника окружности до катета AC равно 2,5. Найдите периметр этого треугольника.

4. В параллелограмме одна из диагоналей перпендикулярна стороне. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, образованный сторонами параллелограмма и этой диагональю, если стороны параллелограмма равны 5 и 3.

5. Диагонали AC и BD ромба $ABCD$ пересекаются в точке O . $AC = 8$, $BD = 6$. В треугольники AOB , BOC , COD и AOD вписаны окружности. Найдите периметр четырёхугольника, вершинами которого служат центры окружностей.

6. К окружности проведена касательная AB (B — точка касания). Прямая AM проходит через центр окружности и пересекает её в точках M и N . Найдите квадрат расстояния от точки B до прямой AN , если $AM = 1$, $AB = \sqrt{3}$.

7. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ из вершины C на диагональ AD опущен перпендикуляр CK . Найдите отношение длин отрезков AK и KD .

8. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC длина средней линии MN равна 10. Площади четырёхугольников $MBCN$ и $AMND$ относятся как $3 : 5$ соответственно. Во сколько раз длина AD больше длины BC ?

Вариант №5

1. Длины двух сторон треугольника равны 27 и 29. Длина медианы, проведенной к третьей стороне, равна 26. Найдите высоту треугольника, проведенную к стороне длиной 27.
2. Основание равнобедренного треугольника равно $\sqrt{32}$, медиана, проведенная к боковой стороне, равна 5. Найдите длину боковой стороны.
3. Длины двух сторон остроугольного треугольника равны $\sqrt{10}$ и $\sqrt{13}$. Найдите длину третьей стороны, если она равна длине проведенной к ней высоты.
4. Около круга радиусом 2 описана равнобедренная трапеция с острым углом 30° . Найдите длину средней линии трапеции.
5. В ромб вписан круг, а в круг вписан квадрат. Определите градусную меру острого угла ромба, если площадь квадрата в 4 раза меньше площади ромба.
6. В окружности радиусом 17,5 проведены диаметр AB , хорды AC и BC , перпендикуляр CD к диаметру AB . Найдите сумму длин хорд AC и BC , если $AC : AD = 5 : 3$.
7. Диагональ AC ромба $ABCD$ равна его стороне. Точка K делит сторону BC так, что $BK : KC = 2 : 1$. Найдите площадь четырехугольника $ABKD$, если сторона ромба равна $6\sqrt{3}$.
8. В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей 2 и 4. Найдите площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны.

Вариант №6

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE , причем $AD = 5$, $CE = 3$, а угол между AD и CE равен 60° . Найдите утроенный квадрат длины AC .
2. В равнобедренном треугольнике проведена медиана к боковой стороне, равной 4. Найдите квадрат длины основания треугольника, если длина медианы равна 3.
3. В треугольнике известны длины двух сторон — 6 и 3. Найдите длину третьей стороны, если полусумма высот, проведенных к данным сторонам, равна третьей высоте.
4. Около круга описана равнобочная трапеция, средняя линия которой равна 10. Определите периметр трапеции.

5. Периметр параллелограмма 90, а острый угол — 60° . Диагональ параллелограмма делит его тупой угол на части в отношении 1 : 3. Найдите большую сторону параллелограмма.
6. Из точки, данной на окружности, проведены две взаимно перпендикулярные хорды. Отрезок, соединяющий их середины, равен 6. Найдите радиус окружности.
7. В ромб $ABCD$ вписана окружность радиусом $\sqrt{3}$. Найдите сторону ромба, зная, что она выражена целым числом и $BK = 2\sqrt{7}$, где K — середина отрезка CD .
8. Разность между площадью круга и площадью вписанного в него квадрата равна $2\sqrt{3}(\pi - 2)$. Найдите площадь правильного шестиугольника, вписанного в этот круг.

Вариант №7

1. Дан треугольник со сторонами 4, 8, 9. Найдите квадрат длины биссектрисы, проведенной к большей стороне.
2. Основание равнобедренного треугольника равно 30, а высота, проведенная к боковой стороне, равна 24. Найдите длину боковой стороны.
3. В равнобедренном треугольнике основание равно $\sqrt{21}$, угол при основании 30° . Найдите длину медианы, проведенной к боковой стороне.
4. Около окружности описана равнобочная трапеция, средняя линия которой равна 5, а синус острого угла при основании равен $\frac{4}{5}$. Найдите площадь трапеции.
5. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса тупого угла B пересекает сторону AD в точке F . Найдите периметр параллелограмма, если $AB = 12$ и $AF : FD = 4 : 3$.
6. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других его сторон на отрезки, равные 2 и 23. Найдите радиус окружности.
7. Площадь ромба $ABCD$ равна 4. Найдите его сторону, зная, что она выражается целым числом и $AF = \sqrt{5}$, где F — середина отрезка BC .
8. Периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, равен $6\sqrt{6}$. Найдите периметр квадрата, вписанного в эту же окружность.

Вариант №8

1. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса BE прямого угла делится центром O вписанной окружности в отношении $BO : OE =$

- $= \sqrt{3} : \sqrt{2}$. Найдите градусную меру большего острого угла треугольника.
2. Медиана, проведенная к одной из боковых сторон равнобедренного треугольника, делит его периметр на части длиной 15 и 6. Найдите длину боковой стороны.
3. У треугольника известны длины двух сторон, $a = 2$, $b = 3$, и площадь $S = \frac{3\sqrt{15}}{4}$. Медиана, проведенная к его третьей стороне, меньше ее половины. Найдите $\sqrt{15}R$, где R — радиус описанной около этого треугольника окружности.
4. Диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны, а площадь трапеции равна 4. Найдите высоту трапеции.
5. Площади двух треугольников, прилегающих к основаниям трапеции и ограниченных ее диагоналями, равны m^2 и n^2 . Найдите площадь трапеции, если $m + n = 10$.
6. Катеты прямоугольного треугольника равны 36 и 48. Найдите расстояние от центра вписанной в треугольник окружности до высоты, проведенной к гипотенузе.
7. Правильный шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность радиусом $3 + \sqrt{3}$. Найдите $\sqrt{3}r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ACD .
8. В выпуклый четырехугольник $ABCD$ вписана окружность с центром в точке O , причём $AO = OC$, $BC = 5$, $CD = 12$, а угол DAB — прямой. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$.

Вариант №9

1. В прямоугольном треугольнике медианы, проведенные к катетам, равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найдите гипотенузу треугольника.
2. Вычислите длину биссектрисы угла A треугольника ABC , если длины его сторон $a = 18$, $b = 15$, $c = 12$.
3. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найдите $\sqrt{13}p$, где p — сумма сторон AB и BC треугольника ABC .
4. Окружность с центром на диагонали AC трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) проходит через вершины A и B , касается стороны CD в точке C и пересекает основание AD в точке E . Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $AB = 5\sqrt{2}$, $CD = 10\sqrt{13}$.
5. Внутри параллелограмма расположены две одинаковые окружности радиусом 6, каждая из которых касается боковой стороны параллело-

- грамма, обоих оснований и второй окружности. Боковая сторона делится точкой касания в отношении $9 : 4$. Найдите площадь параллелограмма.
6. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1 , и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O . Найдите $12S$, где S — площадь четырехугольника $OMCD$.
7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) окружность касается основания AD , боковых сторон AB , CD и проходит через точку пересечения диагоналей AC и BD . Найдите $\frac{16}{\sqrt{3}}R$, где R — радиус окружности, если $AD : BC = 5 : 3$, а площадь трапеции $S = 9$.
8. Через середину гипотенузы AC прямоугольного треугольника ABC проведена прямая, пересекающая катет BC в точке D , а продолжение катета AB за точку A — в точке E . Найдите площадь треугольника ABC , если $CD = 1$, $AE = 2$, $\cos \angle CAB = \frac{3}{5}$.

Вариант №10

1. В треугольнике ABC медианы BK и CE взаимно перпендикулярны. Найдите $BC\sqrt{5}$, если $AB = 6$, $AC = 8$.
2. В треугольнике ABC величина угла A вдвое больше величины угла B , а длины сторон, противолежащих этим углам, соответственно равны 12 и 8 . Найдите косинус угла C , увеличенный в 4 раза.
3. Медиана AM и высота CH равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке K . Найдите площадь треугольника ABC , если $CK = 5$, $KH = 1$.
4. Окружность с центром на диагонали AC трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) проходит через вершины A и B , касается стороны CD в точке S и пересекает основание AD в точке E . Найдите площадь трапеции $ABCD$, если $BC = 2$, $CD = 10\sqrt{26}$.
5. Внутри параллелограмма расположены две одинаковые окружности радиусом 2 , каждая из которых касается боковой стороны параллелограмма, обоих оснований и второй окружности. Боковая сторона делится точкой касания в отношении $1 : 4$. Найдите площадь параллелограмма.
6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Площади треугольников BOC , COD , AOD равны соответственно 20 , 40 , 60 . Найдите градусную меру угла BAO , если известно, что $AB = 15$, $AO = 8$.

7. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) окружность касается основания AD , боковых сторон AB , CD и проходит через точку пересечения диагоналей AC и BD . Площадь трапеции $S = 4$, а $AD : BC = 7 : 5$.

Найдите $12\sqrt{\frac{3}{10}}R$, где R — радиус окружности.

8. Через середину катета AB прямоугольного треугольника ABC проведена прямая, пересекающая гипотенузу AC в точке E , а продолжение катета BC за точку B — в точке F . Найдите $\sqrt{3}S$, где S — площадь треугольника ABC , если $AE = 2$, $BF = 3$, $\angle ACB = 60^\circ$.

Вариант №11

1. В прямоугольном треугольнике длины двух медиан, проведённых к катетам, равны 12 и $4\sqrt{11}$. Найдите длину третьей медианы этого треугольника.

2. Длины двух сторон треугольника равны 1 и $\sqrt{15}$, а длина медианы к третьей стороне равна 2 . Найдите $(5 - \sqrt{15})p$, где p — периметр треугольника.

3. В треугольнике ABC медианы AD и BE пересекаются под прямым углом. Найдите сторону AB этого треугольника, если $AC = 30$ и $BC = 12\sqrt{5}$.

4. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K и прямую DC в точке L . Найдите периметр треугольника ABK , если $AD = 10$, $KL = 7,5$, $CL = 6$.

5. В трапецию $ABCD$ с прямым углом BAD вписана окружность радиусом 5 . Найдите среднюю линию трапеции, если угол между ней и боковой стороной CD трапеции равен 30° .

6. Около треугольника BCD описана окружность. Через точку B к окружности проведена касательная, пересекающая прямую CD в точке A так, что D лежит на отрезке AC . Найдите длину AD , если $CD = 5$ и $AB = 6$.

7. Сторона правильного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ равна $\sqrt{2\sqrt{3} + 3}$. Биссектриса угла $A_6A_2A_3$ пересекает сторону A_4A_5 в точке O . Найдите площадь треугольника A_2A_5O .

8. Хорды AC и BD окружности перпендикулярны и пересекаются в точке P . PH — высота треугольника ADP . Угол $ADP = 30^\circ$, $AH = 2$, $PC = 6$. Найдите отношение площади треугольника ADC к площади треугольника ABC .

Вариант №12

1. Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна $2\sqrt{3}$ и делит прямой угол в отношении $1 : 2$. Найдите больший катет.
2. Высота CH треугольника ABC равна 8, где основание высоты H лежит на отрезке AB . HN — высота треугольника BCH , а HM — высота треугольника ACH . Найдите длину отрезка MN , если $AM = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, а $BN = 12$.
3. Дан треугольник ABC . Известно, что $AC = 10$, $BC = 12$ и $\angle CAB = 2\angle CBA$. Найдите длину стороны AB .
4. Равнобедренная трапеция описана около окружности радиусом 2. Найдите площадь трапеции, если косинус угла при большем основании трапеции равен 0,6.
5. Через середину диагонали AC трапеции $ABCD$ проведена прямая, перпендикулярная AC . Эта прямая пересекает основания AD и BC в точках K и M соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в четырёхугольник $AMCK$, если $AM = 10$, $AC = 16$.
6. Около треугольника ABC описана окружность радиусом $4\sqrt{3}$, и в него же вписана окружность. Хорда описанной окружности, проходящая через центр вписанной окружности и вершину A , пересекает сторону BC в точке M . Найдите MC , если $\angle A = 60^\circ$ и $AB = 2AC$.
7. Дан правильный восьмиугольник $A_1A_2\dots A_8$. Площадь треугольника $A_1A_4A_5$ равна $8\sqrt{2}$. Найдите $(\sqrt{2} - 1) \cdot S$, где S — площадь треугольника $A_1A_4A_6$.
8. Отрезки KP и MN имеют равные длины и пересекаются в точке O так, что $KH \parallel MP$, $OH = 4$, $OM = 5$. Найдите отношение периметров треугольников OKM и ONP .